

Vorrechenübung

Aufgabe 2.1 ●●○ Kreisprozess ideales Gas

In einem **geschlossenen** System durchlaufen **1.5 kg** Luft (**ideales Gas**) folgenden Kreisprozess:

- Prozess 1-2: **Isobare** Expansion von 400 K auf 550 K
 Prozess 2-3: **Isotherme** Expansion von 10 bar auf 7.5 bar
 Prozess 3-4: **Isochore** Abkühlung
 Prozess 4-1: **Polytrope** Kompression zum Ausgangszustand ($n = 1.5$)

a) Skizzieren Sie den Prozess im p - v -Diagramm.

Aus ZF:

4 Zustandsänderungen

Zustandsänderungen

Polytrope	$pV^n = \text{const.}$ (n : Polytropenexponent)
Isobare	$p = \text{const.}$ ($n \equiv 0$)
Isotherme	$T = \text{const.}$
Isochore	$v = \text{const.}$ ($n \rightarrow \infty$)
Isenthalpe	$h = \text{const.}$
Isentrope	$s = \text{const.}$

Zustandsänderungen idealer Gase

Isotherme	$n = 1$
Isentrope	$n = \kappa = \frac{c_p^{\text{ig}}}{c_v^{\text{ig}}}$
Polytropes Temperaturverhältnis	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}$

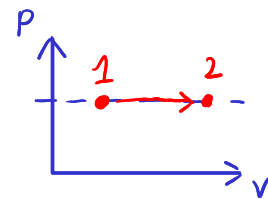
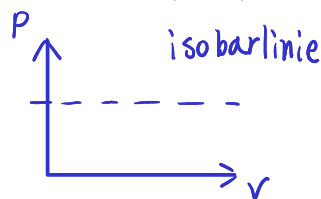
1-2:

Prozess 1-2:

Isobare Expansion von 400 K auf 550 K

Isobare

$$p = \text{const.} \quad (n \equiv 0)$$



2-3:

Prozess 2-3:

Isotherme Expansion von 10 bar auf 7.5 bar

Isotherme

$$T = \text{const.}$$

Isotherme

$$n = 1$$

Polytrope

$$pV^n = \text{const.}$$

(n : Polytropenexponent)

$$n = 1$$

$$pV^n = \text{const.} \Rightarrow p_i V_i = C$$

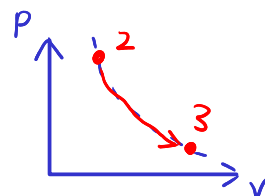
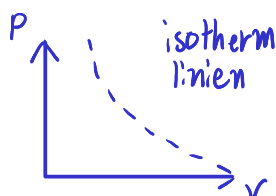
Herleitung zu isotherme Graph

$$pV = \text{const.} = C$$

Y-Achse: p

X-Achse: V

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V} \Rightarrow y = \frac{C}{x} \Rightarrow$$



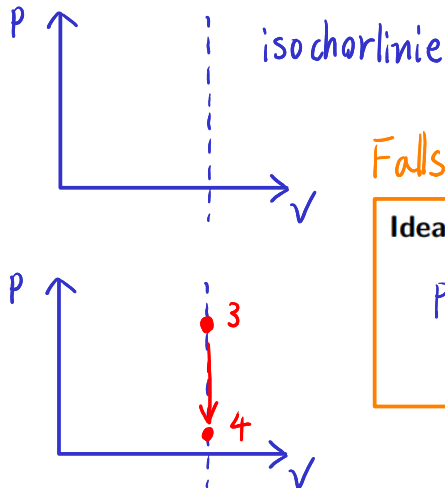
3-4:

Prozess 3-4:

Isochore Abkühlung

Isochore

$v = \text{const.}$ ($n \rightarrow \infty$)



Falls Intuition nicht da, hier die Herleitung

Ideales Gas ($pV = n\bar{R}T$ $pv = RT$ $pV = mRT$)

$$pV = n\bar{R}T$$

$$V = \text{const.}$$

$$n\bar{R} = \text{const.}$$

$$T \searrow \Rightarrow P \searrow$$

4-1:

Prozess 4-1:

Polytrope Kompression zum Ausgangszustand ($n = 1.5$)

Polytrope

$$pV^n = \text{const.}$$

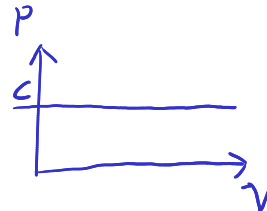
(n : Polytropenexponent)

Herleitung zur Steigung der P-V Funktion

$$pV^n = C \Rightarrow p = \frac{C}{V^n}$$

$$n \rightarrow 0:$$

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V^0} = \frac{C}{1} = C$$



$$n \rightarrow 1:$$

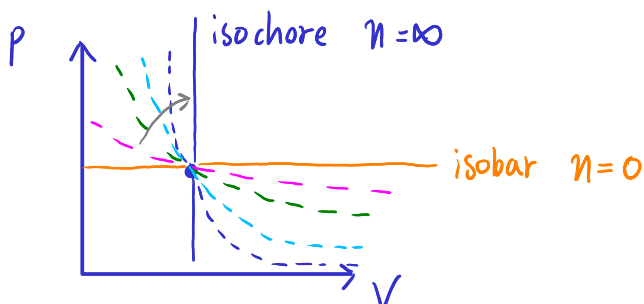
$$\Rightarrow p = \frac{C}{V}$$



$$n \rightarrow \infty:$$

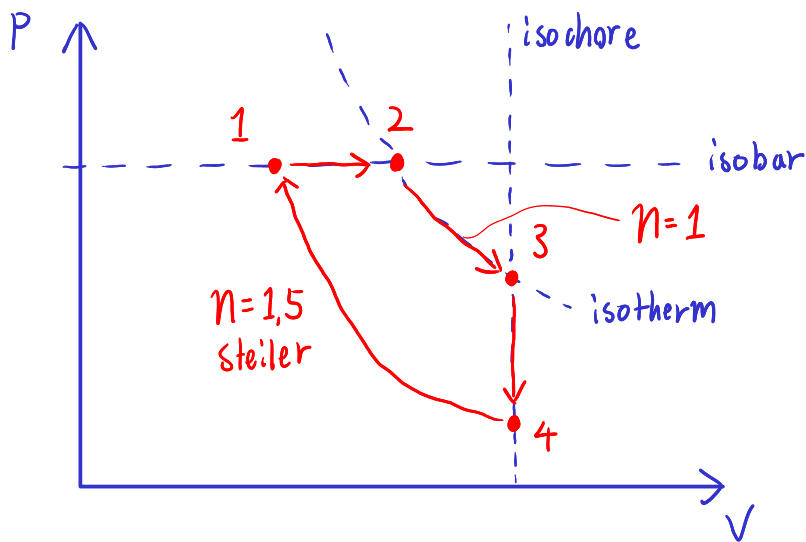
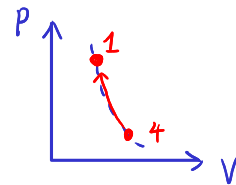
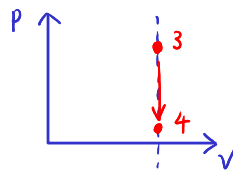
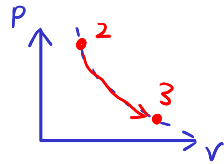
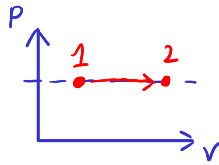
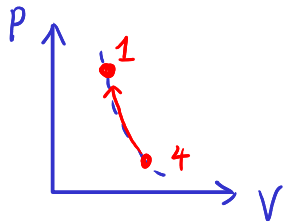
$$\Rightarrow \text{Isochore}$$

$$v = \text{const.} \quad (n \rightarrow \infty)$$



je größer n ist,
desto steiler wird
P-V func.

$n=1,5 \Rightarrow$ steiler als isotherm $n=1$



b) Bestimmen Sie Temperatur, Druck und Volumen der Luft in jedem Zustand.

Aus ZF

Ideales Gas ($pV = n\bar{R}T$ $pv = RT$ $pV = mRT$)

P, V, T von IG: Wenn man 2 Variabel kennt, dann kann den dritten berechnen.

Empfehlen: PVT Tab zu machen, $\Rightarrow$ Übersicht leichter für Korrektur

Zustand	P	V	T

Zustand	P [bar]	V [m³]	T [K]
1	10		400
2	10		550
3	7,5		550
4			

isobar

isotherm

isochore

Ideales Gas ($pV = n\bar{R}T$ $pv = RT$ $pV = mRT$) $\bar{R} = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ $R = c_p^{\text{ig}} - c_v^{\text{ig}} = \frac{\bar{R}}{M}$

$$\textcircled{1} \quad R = \frac{8,314 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right] \cdot \left[\frac{\text{kmol}}{\text{kg}} \right]}{28,97} = 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

mit $M_{\text{Luff}} = 28,97 \text{ kg/kmol}$ TAB-A1

$$pV = mRT \Rightarrow V_1 = \frac{m_{\text{Luff}} R T_1}{p_1}$$

Trick über Einheiten

$$[\text{m}^3] = \frac{[\text{kg}] \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] [\text{K}]}{[\text{bar}]}$$

[bar] → Kein SI Einheit

kJ → Faktor 1000

⇒ Um zu berechnen, muss die Einheit/Faktor angepasst werden

$$\text{Ziel: } [\text{m}^3] \sim \frac{[\text{J}]}{[\text{Pa}]} \sim \frac{[\text{kJ}]}{[\text{kPa}]}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^2 \text{ kPa} = 100 \text{ kPa}$$

[bar] zur [kPa] Faktor 100

Trick über Einheiten

TAB wert sind meistens auf [bar], [kJ]
deswegen rechnet am bestens [bar] auf [kpa] um.
[m³][kpa][kJ][kg][kW][$\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$][K]...
passen in der Rechnung zusammen

⚠ $\frac{\omega^2}{2}$ KE mit [m/s]² ergibt [J], diese muss zu [kJ]
damit die Korrekter Faktor überall stimmen.

$$V_1 = \frac{m_{\text{Luft}} R T_1}{P_1} = \frac{1,5 \text{ kg} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 400 \text{ K}}{10 \text{ bar}}$$

$$10 \cdot 1 \text{ bar} = 10 \cdot 100 \text{ kpa} = 1000 \text{ kpa}$$

$$= \frac{1,5 \text{ kg} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 400 \text{ K}}{10 \cdot 100 \text{ kpa}} = \underline{\underline{0,172 \text{ m}^3}}$$

② geg: $T_2 = 550 \text{ K}$, $P_2 = 10 \text{ bar} = 1000 \text{ kpa}$

Analog: $V_2 = \frac{m_{\text{Luft}} \cdot R \cdot T_2}{P_2} = \underline{\underline{0,237 \text{ m}^3}}$

③ geg: $T_3 = 550 \text{ K}$, $P_3 = 7,5 \text{ bar} = 750 \text{ kpa}$

$$V_3 = \frac{m_{\text{Luft}} \cdot R \cdot T_3}{P_3} = \underline{\underline{0,316 \text{ m}^3}}$$

④ geg: $V_3 = V_4 = 0,316 \text{ m}^3$, ④ → ① $n=1,5$

Aus ZF

Zustandsänderungen

Polytrope

$$pV^n = \text{const.}$$

(n: Polytropenexponent)

$$p_4 V_4^{1,5} = p_1 V_1^{1,5}$$

↓

$$p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{1,5} = 10 \text{ bar} \left(\frac{0,172 \text{ m}^3}{0,316 \text{ m}^3} \right)^{1,5} = \underline{\underline{4,03 \text{ bar}}}$$

$$pV = mRT$$

↓

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{m R} = \underline{\underline{295,4 \text{ K}}}$$

Zustand	P [bar]	V [m³]	T [K]
1	10	0,172	400
2	10	0,237	550
3	7,5	0,316	550
4	4,03	0,316	295,4

c) Berechnen Sie die Arbeit $W_{V,12}$ und den Wärmeübergang Q_{12} von Zustand 1 nach 2.

Aus ZF

Spezifische Volumenarbeit

(reversible Änderung
des Systemvolumens)

$$w_{V,12}^{\text{rev}} = \frac{W_{V,12}^{\text{rev}}}{m} = \int_1^2 p dv$$

Umformen Herleitung sehe
meine Notizen von Woche 3

$$W_{V,12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

1 → 2 : isobar → ↓

$$= p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = p_1 [V_2 - V_1]$$

[bar] → [kPa] → ↓

$$= 10 \cdot 100 \text{ kPa} [0,237 \text{ m}^3 - 0,172 \text{ m}^3] = \underline{\underline{65 \text{ kJ}}}$$

$$Q_{12} = ?$$

1, HS

▪ Geschlossenes System an einem Kolben: $\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{Q}_j - \sum_n \dot{W}_{V,n}$ $\Delta E = E_2 - E_1 = \sum_j Q_j - \sum_n W_{V,n}$

Energie

Gesamte Energie: $E = U + KE + PE$

Bilanzgleichung aufstellen

$$\Delta E = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE = Q_{12} - W_{V,12}$$

Vereinfachung

$$\Delta E = \Delta U + \cancel{\Delta KE} + \cancel{\Delta PE} = Q_{12} - W_{V,12}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} - W_{V,12}$$

Lösen

$$U_2 - U_1 = m u_2 - m u_1 = m [u_2 - u_1]$$

$$\left| \begin{array}{l} u_2(T=550K) = 396,86 \text{ kJ/kg} \\ u_1(T=400K) = 286,76 \text{ kJ/kg} \end{array} \right. \text{ aus TAB-A22}$$

$$\Delta U = 166,05 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow Q_{12} = \Delta U + W_{V,12} = \underline{\underline{231,05 \text{ kJ}}}$$

$$ML: 231 \text{ kJ } \checkmark$$

2. Lösungsweg:

- Approximation: Air $\approx$ Perfektes Gas

Da die Temp. Differenz klein ist, $c_v(T) \approx c_v = \text{const.}$

- Mittelwert der Temp. zw Zustand 1 und 2 als $\bar{T}$

dann c_v für diese $\bar{T}$ finden, otherwise this Approx. not Valid!

- dann mit Ansatz

Perfektes Gas

$$c_v^{\text{pg}} = \text{const.} \quad c_p^{\text{pg}} = \text{const.} \quad \kappa = \frac{c_p^{\text{pg}}}{c_v^{\text{pg}}} = \text{const.}$$

$$\underline{u^{\text{pg}}(T_2) - u^{\text{pg}}(T_1) = c_v^{\text{pg}}(T_2 - T_1)}$$

Falls C_v nicht direkt auf TAB, lerp. nutzen!

lerp. steht für "linear interpolation"

Tabellen-Werte Linear Interpolieren

2. Lösungsweg

① Mitte Temp.

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(400 + 550) \text{ K} = 475 \text{ K}$$

② C_v finden

$$C_v @ 450 \text{ K} = 0,733 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

$$C_v @ 500 \text{ K} = 0,742 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

aus TAB-A20

2,1 lerp. $C_v = \frac{1}{2}(0,733 + 0,742) \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} = 0,7375 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$

③ Lösen

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= m \cdot \Delta u_{12} = m \cdot C_v \cdot (T_2 - T_1) = 1,5 \text{ kg} \cdot 0,7375 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} (550 \text{ K} - 400 \text{ K}) \\ &= 165,9375 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{12} = \Delta U + W_{v,12} = \underline{\underline{230,9375 \text{ kJ}}}$$

$$ML: 231 \text{ kJ} \checkmark$$

Hier sieht man auch, 2 Lösungsweg gleiche - ähnliche Resultat liefert, aber einer ist deutlich komplizierter.

Tipp: Wenn IG, Falls möglich, immer TAB-Wert* nehmen

schnell für $u(T)$, $h(T)$, mach keine IG $\rightarrow$ PG Approximation! langsam

Falls PG, wird es klar in Aufgabestellung angegeben, C_p , C_v werden dabei auch geg. Dann muss man nur damit berechnen und keine $u(T)$, $h(T)$ TAB-Wert*!

* TAB-A22, usw.

